¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 106-112, determinar si la afirmación es cierta o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

106. Es posible que una parábola y su directriz se corten.

107. El punto de la parábola más próximo al foco es el vértice.

108. Si C es la longitud de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b < a$$

entonces $2\pi b \leqslant C \leqslant 2\pi a$.

109. La gráfica de

$$\frac{x^2}{4} + y^4 = 1$$

es una elipse.

110. Si $D \neq 0$ o $E \neq 0$, la gráfica de

$$y^2 - x^2 + Dx + Ey = 0$$

es una hipérbola.

111. Si las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se cortan perpendicularmente, entonces $a = b$.

112. Toda recta tangente a una hipérbola corta a ésta sólo en el punto de tangencia.

113. Probar que la gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una de las siguientes (excepto en casos degenerados).

Cónica	*Condición*
a) Círculo	$A = C$
b) Parábola	$A = 0$ o $C = 0$ (pero no ambas)
c) Elipse	$AC > 0$
d) Hipérbola	$AC < 0$

En los Ejercicios 114-123, clasificar la gráfica de la ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

114. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

115. $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

116. $y^2 - 4y - 4x = 0$

117. $25x^2 - 10x - 200y - 119 = 0$

118. $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

119. $y^2 - 4y = x + 5$

120. $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

121. $2x(x - y) = y(3 - y - 2x)$

122. $3(x - 1)^2 = 6 + 2(y + 1)^2$

123. $9(x + 3)^2 = 36 - 4(y - 2)^2$

9.2 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

CONTENIDO
- Curvas planas y ecuaciones paramétricas
- Eliminación del parámetro
- Determinación de ecuaciones paramétricas
- Los problemas de la tautocrona y la braquistocrona

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta ahora hemos estado representando cada gráfica por una ecuación en *dos* variables. En esta sección estudiaremos situaciones en las que se usan *tres* variables para representar una curva en el plano.

Consideremos la trayectoria que sigue un objeto lanzado al aire con un ángulo de 45°. Si su velocidad inicial es 48 pies/s, el objeto describe la trayectoria parabólica dada por

$$y = -\frac{x^2}{72} + x \qquad \text{Ecuación rectangular}$$

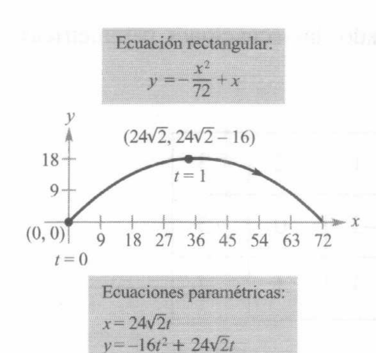


FIGURA 9.17
Movimiento curvilíneo: dos variables de posición y una de tiempo.

como ilustra la Figura 9.17. Ahora bien, esta ecuación no cuenta toda la historia. Aunque nos dice *dónde* ha estado el objeto, no nos dice *cuándo* ha estado en un punto (x, y) dado. Para determinar este instante, podemos introducir una tercera variable t, denominada **parámetro**. Expresando x e y como funciones de t, obtenemos las **ecuaciones paramétricas**

$$x = 24\sqrt{2}\,t \qquad \text{Ecuación paramétrica de } x$$

e

$$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}\,t \qquad \text{Ecuaciones paramétricas de } y$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, podemos determinar que en el instante $t = 0$ el objeto estaba en el punto (0, 0). Análogamente, en el instante $t = 1$ estaba en el punto $(24\sqrt{2}, 24\sqrt{2} - 16)$, etc. (Veremos cómo determinar este tipo particular de ecuaciones paramétricas —las ecuaciones del movimiento— más adelante, en la Sección 11.3.)

En este problema de movimiento concreto, x e y son funciones continuas de t, y la trayectoria resultante recibe el nombre de **curva plana**.

DEFINICIÓN DE CURVA PLANA

Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

se denominan **ecuaciones paramétricas** y t se llama el **parámetro**. El conjunto de puntos (x, y) obtenido cuando t varía en el intervalo I se llama la **gráfica** de las ecuaciones paramétricas. El par formado por las ecuaciones paramétricas y su gráfica recibe el nombre de **curva plana**, y se denota por C.

Nota. A veces es importante distinguir entre la gráfica (el conjunto de puntos) y la curva (los puntos junto con las ecuaciones paramétricas que los definen). Cuando así sea, haremos la distinción explícita. En caso contrario, denotaremos por C tanto la gráfica como la curva.

Para trazar (a mano) una curva dada por un par de ecuaciones paramétricas, podemos ir marcando puntos en el plano xy. Cada par de coordenadas (x, y) está determinado por un valor seleccionado del parámetro t. Marcando los puntos resultantes para valores crecientes de t, se traza la curva en un sentido concreto. Esto se llama la **orientación** de la curva.

EJEMPLO 1 Trazado de una curva

Dibujar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{t}{2}, \quad -2 \leqslant t \leqslant 3$$

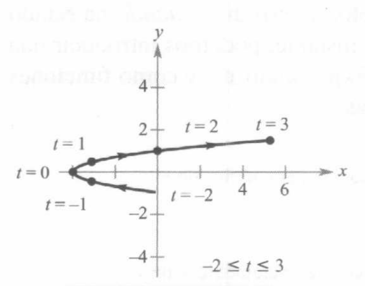


FIGURA 9.18

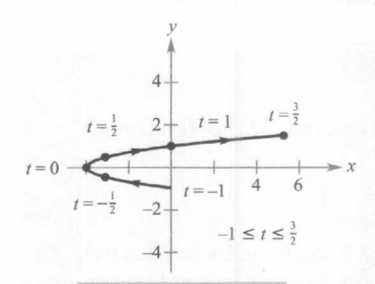


FIGURA 9.19

Solución: Para valores de t en el intervalo dado, las ecuaciones paramétricas proporcionan los puntos (x, y) de la tabla.

t	-2	-1	0	1	2	3
x	0	-3	-4	-3	0	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Marcando los puntos en orden creciente de t y usando la continuidad de f y g, se obtiene la curva C de la Figura 9.18. Observemos que las flechas sobre la curva indican la orientación cuando t crece desde -2 hasta 3. □

Nota. Aplicando el criterio de la recta vertical, vemos que la gráfica de la Figura 9.18 no define a y como función de x. Esto saca a relucir una de las ventajas de las ecuaciones paramétricas: pueden emplearse para describir curvas más generales que las gráficas de las funciones.

Ocurre a menudo que dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica. Por ejemplo, las ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 4 \quad \text{e} \quad y = t, \quad -1 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}$$

poseen la misma gráfica que las del Ejemplo 1. No obstante, comparando los valores de t en las Figuras 9.18 y 9.19, puede verse que la segunda gráfica se recorre más rápidamente (considerando a t como el tiempo) que la primera. De este modo, en las aplicaciones pueden usarse distintas ecuaciones paramétricas para representar las diversas velocidades con las que los objetos recorren una trayectoria dada.

Muchas calculadoras y programas gráficos disponen de un modo gráfico paramétrico. Si tiene acceso a alguno de ellos, intente utilizarlo para comprobar las gráficas de las Figuras 9.18 y 9.19. ¿Representa la curva dada por

$$x = 4t^2 - 8t \quad \text{e} \quad y = 1 - t, \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2$$

la misma gráfica que muestran las Figuras 9.18 y 9.19? ¿Qué observa acerca de la orientación de esta curva?

Eliminación del parámetro

Se llama **eliminar el parámetro** a encontrar una ecuación rectangular que represente la gráfica de unas ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, es posi-

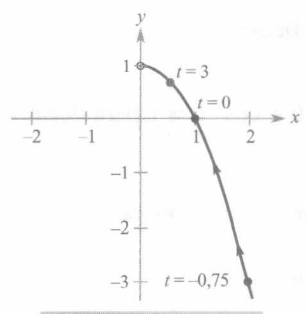
ble eliminar el parámetro de las ecuaciones paramétricas del Ejemplo 1 como sigue:

Ecuaciones paramétricas	→	Despejar t en una ecuación	→	Sustituir en la otra ecuación	→	Ecuación rectangular
$x = t^2 - 4$ $y = t/2$		$t = 2y$		$x = (2y)^2 - 4$		$x = 4y^2 - 4$

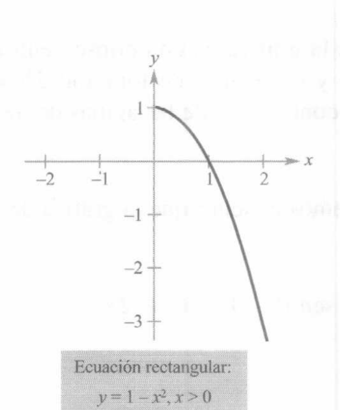
Una vez eliminado el parámetro, se reconoce la ecuación $x = 4y^2 - 4$ como la de una parábola de eje horizontal y vértice en (–4, 0), como indica la Figura 9.18.

Los rangos de x e y implícitos en las ecuaciones paramétricas pueden alterarse al pasar a forma rectangular. En tal caso, debe ajustarse el dominio de la ecuación rectangular para que su gráfica coincida con la de las ecuaciones paramétricas. El próximo ejemplo muestra una de estas situaciones.

EJEMPLO 2 Ajuste del dominio después de eliminar el parámetro



Ecuaciones paramétricas: $x = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, $y = \frac{t}{t+1}$, $t > -1$



Ecuación rectangular: $y = 1 - x^2$, $x > 0$

FIGURA 9.20

Dibujar la curva de ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{e} \quad y = \frac{t}{t+1}, \quad t > -1$$

eliminando el parámetro y ajustando el dominio de la ecuación rectangular resultante.

Solución: Comenzamos despejando t de una de las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, podemos despejar t de la primera ecuación como sigue:

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \qquad \text{Ecuación paramétrica de } x$$

$$x^2 = \frac{1}{t+1} \qquad \text{Elevar al cuadrado}$$

$$t + 1 = \frac{1}{x^2}$$

$$t = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{x^2} \qquad \text{Despejar } t$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación paramétrica de y se obtiene

$$y = \frac{t}{t+1} \qquad \text{Ecuación paramétrica de } y$$

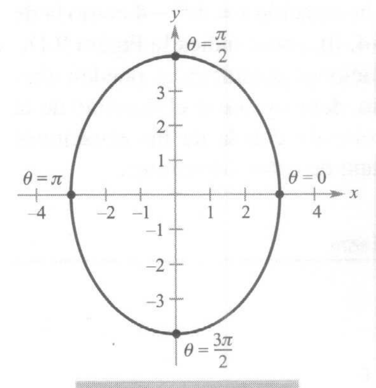
$$y = \frac{(1 - x^2)/x^2}{[(1 - x^2)/x^2] + 1} \qquad \text{Sustituir } t \text{ por } (1 - x^2)/x^2$$

$$y = 1 - x^2 \qquad \text{Simplificar}$$

La ecuación rectangular, $y = 1 - x^2$ está definida para todo valor de x, pero en la ecuación paramétrica de x puede verse que la curva sólo está definida cuando $t > -1$. Esto implica que debemos restringir el dominio de x a los valores positivos, como muestra la Figura 9.20. □

El parámetro de un conjunto de ecuaciones paramétricas no tiene por qué ser el tiempo. En el siguiente ejemplo se usa un *ángulo* como parámetro.

EJEMPLO 3 Uso de la trigonometría para eliminar un parámetro



Ecuaciones paramétricas:
$x = 3\cos\theta$, $y = 4 \operatorname{sen}\theta$
Ecuación rectangular:
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

FIGURA 9.21

Trazar la curva representada por

$$x = 3\cos\theta \quad \text{e} \quad y = 4 \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Solución: Primero despejamos $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ en las ecuaciones:

$$\cos\theta = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{4} \qquad \text{Despejar } \cos\theta \text{ y } \operatorname{sen}\theta$$

A continuación, utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para llegar a una ecuación que sólo involucre a x e y.

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \qquad \text{Identidad trigonométrica}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituir}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular}$$

Esta ecuación rectangular permite ver que la gráfica es una elipse centrada en (0, 0), con vértices en (0, 4) y (0, –4) y eje menor de longitud $2b = 6$ (Figura 9.21). La elipse se traza en sentido contrario al de las agujas del reloj cuando θ varía de 0 a 2π. □

Mediante la técnica del Ejemplo 3, podemos concluir que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\cos\theta \quad \text{e} \quad y = k + b \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

es la elipse (trazada en sentido antihorario)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad y = k + b\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

es también la elipse (trazada en sentido horario)

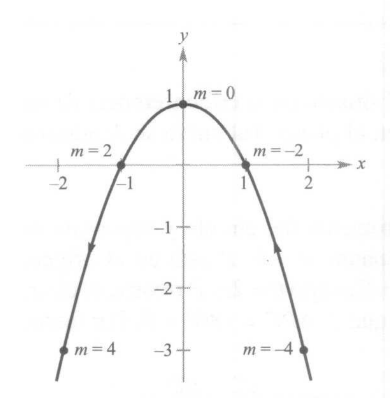
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si tiene acceso a una calculadora gráfica, intente usarla en modo paramétrico para dibujar varias elipses.

En los Ejemplos 2 y 3 es importante darse cuenta de que eliminar el parámetro supone sobre todo una *ayuda para el trazado de la curva.* Si las ecuaciones paramétricas representan la trayectoria de un objeto en movimiento, la gráfica sola no es suficiente para describir el movimiento. Se necesitan las ecuaciones paramétricas para poder determinar la *posición*, el *sentido* de movimiento y la *velocidad* en un instante dado.

Determinación de ecuaciones paramétricas

Los tres primeros ejemplos de esta sección ilustraban técnicas para el trazado de gráficas dadas mediante ecuaciones paramétricas. Nos ocuparemos ahora del problema inverso. ¿Cómo determinar ecuaciones paramétricas para una gráfica dada o una descripción física dada? Por el Ejemplo 1 sabemos que tal representación no es única. El siguiente ejemplo, en el que se hallan dos representaciones paramétricas diferentes de una misma gráfica, insiste en este punto.



Ecuación rectangular: $y = 1 - x^2$
Ecuaciones paramétricas:
$x = -\frac{m}{2}$ $y = 1 - \frac{m^2}{4}$

FIGURA 9.22

EJEMPLO 4 Búsqueda de ecuaciones paramétricas de una gráfica dada

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas que representen la gráfica de $y = 1 - x^2$, usando cada uno de los siguientes parámetros.

a) $t = x$ *b*) La pendiente $m = \frac{dy}{dx}$ en el punto (x, y).

Solución:

a) Haciendo $x = t$ resultan las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{e} \quad y = 1 - x^2 = 1 - t^2$$

b) Para expresar x e y en función del parámetro m, podemos proceder así:

$$m = \frac{dy}{dx} = -2x \qquad \text{Derivar } y = 1 - x^2$$

$$x = -\frac{m}{2} \qquad \text{Despejar } x$$

Esto proporciona una ecuación paramétrica para x. Con el fin de obtener otra para y, sustituimos x por $-m/2$ en la ecuación original.

$$y = 1 - x^2 \qquad \text{Ecuación rectangular original}$$

$$y = 1 - \left(-\frac{m}{2}\right)^2 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } -m/2$$

$$y = 1 - \frac{m^2}{4} \qquad \text{Simplificar}$$

Así pues, las ecuaciones paramétricas son

$$x = -\frac{m}{2} \quad \text{e} \quad y = 1 - \frac{m^2}{4}$$

En la Figura 9.22 puede observarse que la curva resultante tiene una orientación de derecha a izquierda, determinada por los valores crecientes de la pendiente m. En la parte *a*), la curva tendría la orientación opuesta. □

Para un uso eficiente de los programas gráficos, es importante adquirir destreza en la representación de gráficas mediante ecuaciones paramétricas. La razón es que muchas calculadoras poseen sólo tres modos gráficos: 1) funciones, 2) ecuaciones paramétricas y 3) ecuaciones polares. Muchas de las calculadoras no están programadas para dibujar la gráfica de una ecuación general. Por ejemplo, supongamos que queremos dibujar la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Para hacerlo en el modo de funciones, necesitamos dos ecuaciones: $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y = -\sqrt{x^2 - 1}$. En modo paramétrico, podemos representar la gráfica mediante las ecuaciones $x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$.

EJEMPLO 5 Ecuaciones paramétricas de una cicloide

CICLOIDES

Galileo fue el primero en llamar la atención sobre la cicloide, al recomendar su uso para los arcos de los puentes. Pascal, en cierta ocasión, invirtió ocho días intentando resolver problemas relativos a las cicloides, tales como calcular el área bajo un arco o el volumen del sólido de revolución obtenido al hacerla girar en torno a una recta. La cicloide posee tantas propiedades interesantes y ha causado tantas disputas entre los matemáticos que se le ha llamado «la Helena de la Geometría» y «la manzana de la discordia».

Determinar la curva descrita por un punto P situado en la circunferencia de un círculo de radio a que rueda por una recta en el plano. Tal curva se denomina **cicloide**.

Solución: Denotemos por el parámetro θ la rotación del círculo y supongamos que el punto $P = (x, y)$ parte del origen. Cuando $\theta = 0$, P está en el origen. Cuando $\theta = \pi$, P está en un máximo: $(\pi a, 2a)$. Cuando $\theta = 2\pi$, P retorna al eje x, en $(2\pi a, 0)$. En la Figura 9.23, puede verse que $\angle APC = 180° - \theta$. Por tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}(\angle APC) = \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$$

$$\cos \theta = -\cos(180° - \theta) = -\cos(\angle APC) = \frac{AP}{-a}$$

de donde se sigue que

$$AP = -a \cos \theta \quad \text{y} \quad BD = a \operatorname{sen} \theta$$

PARA MÁS INFORMACIÓN sobre las cicloides véase el artículo «The Geometry of Rolling Curves», de John Bloom y Lee Whitt, en *The American Mathematical Monthly,* junio-julio 1981.

Puesto que el círculo rueda por el eje x, sabemos que $OD = \widehat{PD} = a\theta$. Además, como $BA = DC = a$, tenemos que

$$x = OD - BD = a\theta - a \operatorname{sen} \theta$$
$$y = BA + AP = a - a \cos \theta$$

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas son

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

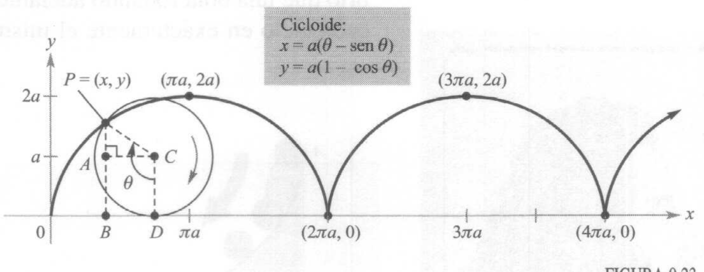


FIGURA 9.23 □

La cicloide de la Figura 9.23 presenta puntos angulosos en los valores $x = 2n\pi a$. Observemos que las derivadas $x'(\theta)$ e $y'(\theta)$ son ambas nulas en los puntos con $\theta = 2n\pi$

> Algunas calculadoras gráficas permiten simular el movimiento de un objeto en el plano o el espacio. Si dispone de una de ellas, intente utilizarla para trazar la trayectoria de la cicloide mostrada en la Figura 9.23.

$$x(\theta) = a(\theta - \text{sen } \theta) \qquad y(\theta) = a(1 - \cos \theta)$$
$$x'(\theta) = a - a\cos \theta \qquad y'(\theta) = a \text{ sen } \theta$$
$$x'(2n\pi) = 0 \qquad y'(2n\pi) = 0$$

Entre estos puntos, se dice que la cicloide es **suave**.

DEFINICIÓN DE CURVA SUAVE

Se dice que una curva C, representada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ en un intervalo I, es **suave** si f' y g' son continuas en I y no se anulan simultáneamente, excepto posiblemente en los puntos terminales de I. Se dice que la curva C es **suave a trozos** si es suave en cada subintervalo de alguna partición de I.

Los problemas de la tautocrona y la braquistocrona

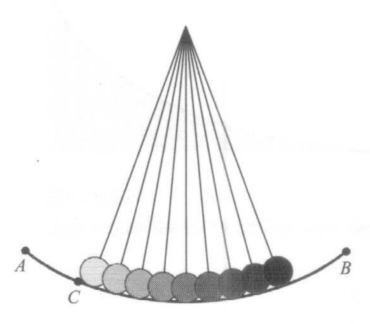


FIGURA 9.24
El tiempo que requiere para completar una oscilación un péndulo que parte del punto C es sólo aproximadamente el mismo que cuando parte de A.

El tipo de curva descrito en el Ejemplo 5 está relacionado con dos de los problemas más famosos en la historia del Cálculo. El primero, el **problema de la tautocrona**, surgió con el descubrimiento de Galileo de que el tiempo requerido para completar una oscilación de un péndulo es *aproximadamente* el mismo si efectúa un movimiento largo a velocidades altas o uno corto a velocidades más bajas (Figura 9.24). En una época tardía de su vida, Galileo (1564-1642) se dio cuenta de que podía utilizar este principio para construir un reloj. Sin embargo, no fue capaz de dominar la mecánica de su construcción real. Christian Huygens (1629-1695) fue el primero en diseñar y construir un modelo capaz de funcionar. En su trabajo con los péndulos, Huygens observó que éstos

no invierten *exactamente* el mismo tiempo en completar oscilaciones de longitudes variables. (Esto no afecta a un reloj de péndulo, ya que la longitud del arco circular se mantiene constante dando al péndulo un ligero impulso cada vez que pasa por el punto más bajo.) Al estudiar el problema, Huygens descubrió que una bola rodando adelante y atrás por una cicloide invertida completa cada ciclo en exactamente el mismo tiempo.



JAMES BERNOULLI (1654-1705)

James (o Jacques) Bernoulli, el hermano mayor de John, fue uno más de los varios matemáticos de primera fila de la familia suiza Bernoulli. Los logros matemáticos de James le hicieron ocupar un lugar prominente en el desarrollo inicial del Cálculo.

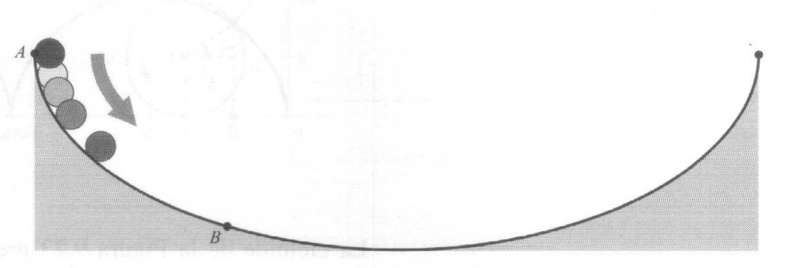


FIGURA 9.25
Una cicloide invertida es la trayectoria por la cual una bola desciende en el tiempo más corto.

El segundo problema, planteado por John Bernoulli en 1696, es el **problema de la braquistocrona** (en griego, *braquis* = corto y *cronos* = tiempo). El problema consistía en determinar la trayectoria descendente por la que una partícula deslizará desde un punto A hasta otro B en el *tiempo más corto*. Varios matemáticos aceptaron el reto y, el año siguiente, Newton, Leibniz, L'Hôpital, John Bernoulli y James Bernoulli resolvieron el problema. La solución no resulta ser una línea recta desde A hasta B, sino una cicloide invertida que pasa por A y B, como ilustra la Figura 9.25. Lo más chocante de la solución es que una partícula que parte del reposo en *cualquier* otro punto C entre A y B (Figura 9.26) tarda exactamente el mismo tiempo en llegar a B.

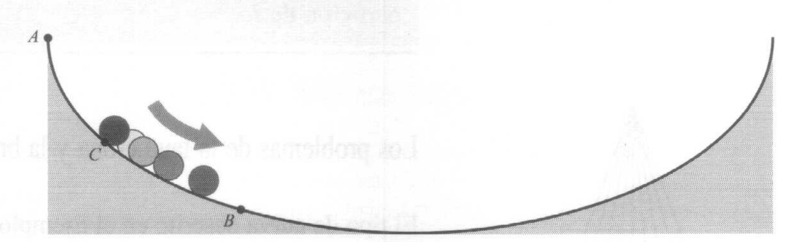


FIGURA 9.26
Una bola que parte de C tarda el mismo tiempo en llegar a B que una que parte de A.

PARA MÁS INFORMACIÓN Una demostración del famoso problema de la braquistocrona puede verse en el artículo «A New Minimization Proof for the Brachistochrone», de Gary Lawlor, en *The American Mathematical Monthly*, marzo 1996.

Ejercicios de la Sección 9.2

1. Consideremos las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ e $y = 1 - t$.

a) Completar la tabla.

t	0	1	2	3	4
x					
y					

b) Dibujar los puntos (x, y) generados en la tabla y esbozar una gráfica de las ecuaciones paramétricas, indicando su orientación.

c) Con ayuda de una calculadora, comprobar la gráfica del apartado *b*).

d) Hallar la ecuación rectangular eliminando el parámetro. Comparar la gráfica del apartado *b*) con la de la ecuación rectangular.

2. Consideremos las ecuaciones paramétricas $x = 4 \cos^2 \theta$ e $y = 2 \text{ sen } \theta$.

a) Completar la tabla.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
x					
y					

b) Dibujar los puntos (x, y) generados en la tabla y esbozar una gráfica de las ecuaciones paramétricas. Indicar la orientación de la gráfica.

c) Usando una calculadora, comprobar la gráfica del apartado *b*).

d) Hallar la ecuación rectangular eliminando el parámetro. Comparar la gráfica del apartado *b*) con la de la ecuación rectangular.

e) Si se tomaran valores de θ en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ para confeccionar la tabla del apartado *a*), ¿sería diferente la gráfica del apartado *b*)? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 3-16, esbozar la curva representada por las ecuaciones paramétricas (indicando su sentido) y escribir la ecuación rectangular correspondiente eliminando el parámetro.

3. $x = 3t - 1,\ y = 2t + 1$

4. $x = 3 - 2t,\ y = 2 + 3t$

5. $x = t + 1,\ y = t^2$

6. $x = \sqrt[3]{t},\ y = 1 - t$

7. $x = t^3,\ y = \dfrac{t^2}{2}$

8. $x = t^2 + t,\ y = t^2 - t$

9. $x = t - 1,\ y = \dfrac{t}{t - 1}$

10. $x = 1 + \dfrac{1}{t},\ y = t - 1$

11. $x = 2t,\ y = |t - 2|$

12. $x = |t - 1|,\ y = t + 2$

13. $x = \sec \theta,\ y = \cos \theta,\ 0 \leqslant \theta < \pi/2,\ \pi/2 < \theta \leqslant \pi$

14. $x = \text{tg}^2\, \theta,\ y = \sec^2 \theta$

15. $x = 3 \cos \theta,\ y = 3 \text{ sen } \theta$

16. $x = \cos \theta,\ y = 3 \text{ sen } \theta$

En los Ejercicios 17-27, usar una calculadora para dibujar la curva representada por las ecuaciones paramétricas (indicando su sentido). Eliminar el parámetro y escribir la ecuación rectangular correspondiente.

17. $x = 4 \text{ sen } 2\theta,\ y = 2 \cos 2\theta$

18. $x = \cos \theta,\ y = 2 \text{ sen } 2\theta$

19. $x = 4 + 2 \cos \theta$
$y = -1 + \text{sen } \theta$

20. $x = 4 + 2 \cos \theta$
$y = -1 + 2 \text{ sen } \theta$

21. $x = \sec \theta,\ y = \text{tg } \theta$

22. $x = 4 \sec \theta,\ y = 3 \text{ tg } \theta$

23. $x = \cos^3 \theta,\ y = \text{sen}^3\, \theta$

24. $x = t^3,\ y = 3 \ln t$

25. $x = \ln 2t,\ y = t^2$

26. $x = e^{-t},\ y = e^{3t}$

27. $x = e^{2t},\ y = e^t$

Comparación de curvas planas En los Ejercicios 28-31, determinar las diferencias entre las curvas correspondientes a las ecuaciones paramétricas. ¿Son iguales las gráficas? ¿Son iguales las orientaciones? ¿Son suaves las curvas?

28. *a*) $x = t$, $y = 2t + 1$
b) $x = \cos \theta$, $y = 2 \cos \theta + 1$
c) $x = e^{-t}$, $y = 2e^{-t} + 1$
d) $x = e^t$, $y = 2e^t + 1$

29. *a*) $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \text{ sen } \theta$
b) $x = \sqrt{4t^2 - 1}/|t|$, $y = 1/t$
c) $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{4 - t}$
d) $x = -\sqrt{4 - e^{2t}}$, $y = e^t$

30. *a*) $x = \cos \theta$, $y = 2 \text{ sen}^2\, \theta$, $0 < \theta < \pi$
b) $x = \cos(-\theta)$, $y = 2 \text{ sen}^2 (-\theta)$, $0 < \theta < \pi$

31. *a*) $x = t + 1,\ y = t^3$
b) $x = -t + 1,\ y = (-t)^3$

32. *Conjetura*

a) Utilizando una calculadora, dibujar las curvas representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas.

$$x = 4 \cos t \qquad x = 4 \cos (-t)$$
$$y = 3 \operatorname{sen} t \qquad y = 3 \operatorname{sen} (-t)$$

b) Describir cómo varía la gráfica cuando se cambia el signo del parámetro.

c) Formular una conjetura acerca de la variación de la gráfica de unas ecuaciones paramétricas cuando se cambia el signo del parámetro.

d) Comprobar la conjetura con otras ecuaciones paramétricas.

33. *Redacción* Revisar los Ejercicios 28-32 y describir en unas líneas cómo pueden ser diferentes las gráficas de curvas representadas por distintas ecuaciones paramétricas, incluso si al eliminar el parámetro en cada conjunto resulta la misma ecuación rectangular.

En los Ejercicios 34-37, eliminar el parámetro y obtener la forma canónica de la ecuación rectangular.

34. Recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2):
$x = x_1 + t(x_2 - x_1),\ y = y_1 + t(y_2 - y_1)$

35. Círculo: $x = h + r \cos \theta,\ y = k + r \operatorname{sen} \theta$

36. Elipse: $x = h + a \cos \theta$
$y = k + b \operatorname{sen} \theta$

37. Hipérbola: $x = h + a \sec \theta$
$y = k + b \operatorname{tg} \theta$

En los Ejercicios 38-45, usar los resultados de los Ejercicios 34-37 para encontrar unas ecuaciones paramétricas de la recta o cónica.

38. Recta: Pasa por (0, 0) y (5, −2)

39. Recta: Pasa por (1, 4) y (5, −2)

40. Círculo: Centro (2, 1); Radio: 4

41. Círculo: Centro: (−3, 1); Radio: 3

42. Elipse: Vértices: (±5, 0); Focos: (±4, 0)

43. Elipse: Vértices: (4, 7), (4, −3); Focos: (4, 5), (4, −1)

44. Hipérbola: Vértices: (±4, 0); Focos: (±5, 0)

45. Hipérbola: Vértices: (0, ±1); Focos: (0, ±2)

En los Ejercicios 46-49, hallar dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular dada.

46. $y = 3x - 2$

47. $y = \dfrac{1}{x}$

48. $y = x^3$

49. $y = x^2$

En los Ejercicios 50-57, utilizar una calculadora para dibujar la curva representada por las ecuaciones paramétricas. Indicar el sentido de recorrido de la curva. Identificar todos los puntos en los que la curva no es suave.

50. Cicloide: $x = 2(\theta - \operatorname{sen} \theta),\ y = 2(1 - \cos \theta)$

51. Cicloide: $x = \theta + \operatorname{sen} \theta,\ y = 1 - \cos \theta$

52. Cicloide prolata: $x = \theta - \frac{3}{2} \operatorname{sen} \theta,\ y = 1 - \frac{3}{2} \cos \theta$

53. Cicloide prolata: $x = 2\theta - 4 \operatorname{sen} \theta,\ y = 2 - 4 \cos \theta$

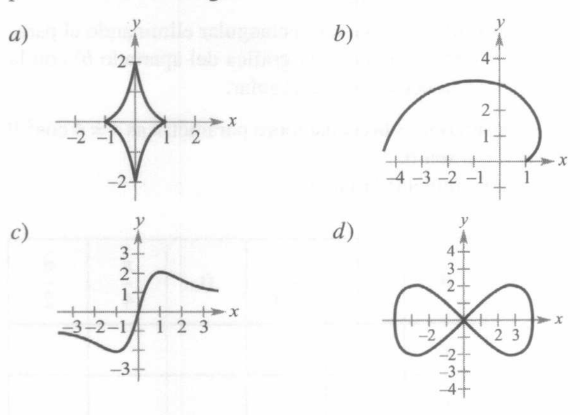
54. Hipocicloide: $x = 3 \cos^3 \theta,\ y = 3 \operatorname{sen}^3 \theta$

55. Cicloide corta: $x = 2\theta - \operatorname{sen} \theta,\ y = 2 - \cos \theta$

56. Hechicera de Agnesi: $x = 2 \operatorname{ctg} \theta,\ y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$

57. Folio de Descartes: $x = 3t/(1 + t^3),\ y = 3t^2/(1 + t^3)$

En los Ejercicios 58-61, asociar cada conjunto de ecuaciones paramétricas con su gráfica.



58. Curvas de Lissajous: $x = 4 \cos \theta,\ y = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

59. Evoluta de la elipse: $x = \cos^3 \theta,\ y = 2 \operatorname{sen}^3 \theta$

60. Involuta del círculo: $x = \cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta,$
$y = \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta$

61. Serpentina: $x = \operatorname{ctg} \theta,\ y = 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

62. *Cicloide corta* Un disco de radio *a* rueda sin deslizar a lo largo de una recta. La curva descrita por un punto *P* situado a *b* unidades del centro ($b < a$) se denomina **cicloide corta** (véase figura). Usando el ángulo θ como parámetro, encontrar ecuaciones paramétricas para esta curva.

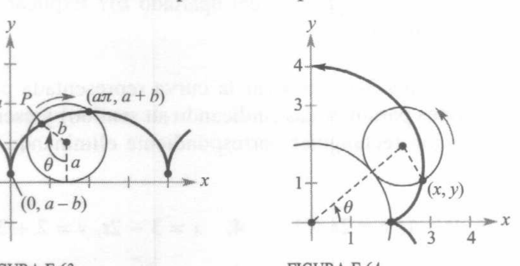


FIGURA E.63 FIGURA E.64

63. ***Epicicloide*** Un círculo de radio 1 rueda sin deslizar alrededor de otro círculo de radio 2. La curva descrita por un punto de la circunferencia del círculo más pequeño se llama **epicicloide** (véase Figura E.63). Usando como parámetro el ángulo θ, encontrar ecuaciones paramétricas para esta curva.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 64-67, determinar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

64. Los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2 + 1$ y $x = 3t$, $y = 9t^2 + 1$ corresponden a una misma ecuación rectangular.

65. La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ e $y = t^2$ es la recta $y = x$.

66. Si y es función de t y x es función de t, entonces y es función de x.

67. Si $f(t_1) = 0$ y $g(t_2) = 0$, entonces la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ pasa por el origen.

Movimiento de un proyectil En el Ejercicio 68, se considera un proyectil lanzado desde una altura de h pies sobre el suelo, formando un ángulo θ con la horizontal. Si la velocidad inicial es v_0 pies por segundo, la trayectoria del proyectil puede describirse mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad \text{e} \quad y = h + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2$$

68. La trayectoria de un proyectil admite la ecuación rectangular

$$y = 5 + x - 0{,}005x^2$$

a) Eliminar el parámetro t de la función de posición para el movimiento del proyectil y comprobar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2} x^2 + (\operatorname{tg} \theta)x + h$$

b) Usar el resultado del apartado *a)* para determinar h, v_0 y θ. Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

c) Representar con una calculadora la ecuación rectangular de la trayectoria del proyectil. Confirmar la respuesta del apartado *b)* dibujando la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

d) Con ayuda de una calculadora, estimar la altura máxima y el alcance del proyectil.

69. Consideremos la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Dibujar esta curva en el plano xy. Usar la gráfica para probar que $(t^2 - 1)^2 + (2t)^2 = (t^2 + 1)^2$. Ilustrar la fórmula con $t = 2$ y $t = 3$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

En griego, *cicloide = rueda*, *hipocicloide = bajo la rueda* y *epicicloide = sobre la rueda*. Asignar las gráficas adecuadas a la hipocicloide y la epicicloide.

Hipocicloide $H(A, B)$

Trayectoria descrita por un punto fijo de un círculo de radio B que rueda por el *interior* de un círculo de radio A.

$$x = (A - B) \cos t + B \cos \left(\frac{A - B}{B}\right)t$$

$$y = (A - B) \operatorname{sen} t - B \operatorname{sen} \left(\frac{A - B}{B}\right)t$$

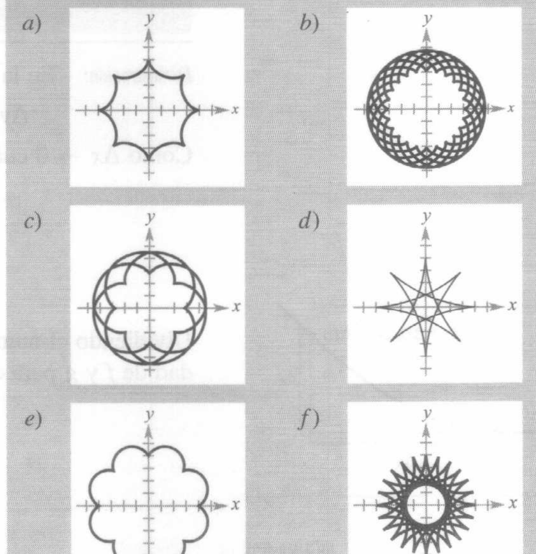
Epicicloide $E(A, B)$

Trayectoria descrita por un punto fijo de un círculo de radio B que rueda por el *exterior* de un círculo de radio A.

$$x = (A + B) \cos t - B \cos \left(\frac{A + B}{B}\right)t$$

$$y = (A + B) \operatorname{sen} t - B \operatorname{sen} \left(\frac{A + B}{B}\right)t$$

I. $H(8, 3)$	II. $E(8, 3)$
III. $H(8, 7)$	IV. $E(24, 3)$
V. $H(24, 7)$	VI. $E(24, 7)$



Ejercicios basados en «Mathematical Discovery via Computer Graphics: Hypocycloids and Epicycloids», de Florence S. Gordon y Sheldon P. Gordon, *College Mathematics Journal*, noviembre 1984, pág. 441. Utilizados con permiso de los autores.